

## MAPLE – POWERPOINT CÔNG CỤ DẠY VÀ HỌC PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

**Trần Công Mẫn**

*Khoa Toán, Trường Đại học Khoa học – Đại học Huế*

*Email: mantran.math@gmail.com*

### TÓM TẮT

*Trong bài báo này, tác giả muốn trình bày một bộ công cụ mới giúp cho việc dạy và học môn “Phép tính tích phân hàm nhiều biến”. Bộ công cụ này bao gồm các slide bài giảng trên PowerPoint về phép tính tích phân hàm nhiều biến và một ứng dụng Maplet tính tích phân. Bộ công cụ được xây dựng nhằm giúp giảng viên trong việc dạy lý thuyết trên lớp và giúp sinh viên tự thực hành tính toán. Đặc biệt, các slide PowerPoint kết hợp với hình ảnh động của Maple giúp giảng viên giải thích các khái niệm và phương pháp tính tích phân rõ ràng hơn trong khi ứng dụng Maplet giúp sinh viên ôn tập lại lý thuyết và tự giải các bài tập.*

**Từ khóa:** Maple, tích phân hai lớp, tích phân ba lớp, Maplet, slide.

### 1. MỞ ĐẦU

Trong vài thập kỷ qua, các hệ thống đại số máy tính đã được sử dụng rộng rãi như là một công cụ trong việc dạy và học toán. Một số gói lệnh hình thức cho các chuyên ngành toán học đã được phát triển bằng cách sử dụng các phần mềm như MATHEMATICA, MATHLAB hay MAPLE. Một gói lệnh hình thức như vậy bao gồm các lệnh hay các hàm từ cơ bản đến chuyên sâu dùng để giải quyết các vấn đề thuộc một lĩnh vực nào đó của toán học. Nhiều nghiên cứu đã chỉ ra sự hiệu quả trong việc học toán của sinh viên khi sử dụng các gói lệnh hình thức [1-5]. Có thể thấy rằng các gói lệnh hình thức giúp sinh viên hiểu khái niệm một cách sâu sắc hơn nhờ vào việc dùng các hình ảnh trực quan để minh họa cho các khái niệm và chứng minh định lý. Trong các phần mềm trên, Maple là phần mềm được đông đảo người làm toán sử dụng bởi sự hiệu quả trong tính toán và khả năng đồ họa tuyệt vời. Ngoài ra, Maple còn có một hệ thống thư viện lớn với đầy đủ các hàm toán học ở hầu hết các chuyên ngành toán học và nó còn là một ngôn ngữ lập trình mạnh.

Với sự kết hợp giữa Maple và Microsoft PowerPoint, tác giả đã tạo ra một bộ công cụ giúp cho việc dạy và học môn phép tính tích phân hàm nhiều biến. Công cụ này bao gồm các slide bài giảng về phép tính tích phân hàm nhiều biến và một ứng dụng tính tích phân. Các bài giảng được thiết kế theo hướng thuận lợi cho người dạy cũng như người học nên tác giả đã kết hợp với Maple tạo ra các đồ thị, hình ảnh động để minh họa rõ ràng hơn cho lý thuyết tích phân.

Ứng dụng tính tích phân có giao diện dễ sử dụng giúp sinh viên tự làm các bài tập qua đó củng cố được kiến thức đã học.

## 2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Qua nhiều năm giảng dạy môn Phép tính tích phân hàm nhiều biến, tác giả nhận thấy rằng đây là môn học gây khá nhiều khó khăn cho sinh viên trong việc hiểu lý thuyết do phải hình dung một cách trừu tượng những hình ảnh trong không gian ba chiều. Trong cách dạy thông thường, giảng viên cũng đã cố gắng vẽ bằng tay một số đồ thị trong không gian 3 chiều trên bảng nhưng các hình ảnh này thường đơn giản và không rõ ràng lắm cho việc minh họa lý thuyết. Để khắc phục điều này, một phương pháp mới trong việc giảng dạy môn học trên được phát triển bằng cách sử dụng phần mềm trình chiếu Microsoft Powerpoint kết hợp với phần mềm Maple.

Để giúp cho việc dạy tích phân hàm nhiều biến của giảng viên, tác giả đã thiết kế hai bài giảng điện tử: một bài giảng về tích phân 2 lớp và một bài giảng về tích phân 3 lớp. Mỗi bài giảng bao gồm một số slide PowerPoint và các đồ thị, hình ảnh động được tạo ra bởi Maple. Các slide này có nhiệm vụ trình bày các khái niệm, lý thuyết về tích phân còn những hình ảnh động sẽ giúp sinh viên có cái nhìn trực quan hơn về lý thuyết đang học. Bên cạnh đó, tác giả đã sử dụng ngôn ngữ lập trình Maple tạo nên một ứng dụng Maplet tích hợp hai công cụ tính tích phân 2 lớp và 3 lớp theo từng bước giúp sinh viên thực hành các lý thuyết đã học thông qua việc giải các ví dụ và bài tập tích phân.

## 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

### 3.1. Thiết kế các bài giảng tích phân hai lớp, ba lớp

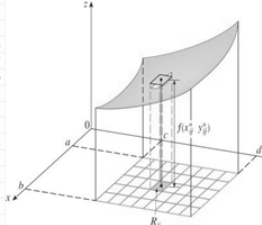
Về lý thuyết, định nghĩa tích phân hai lớp của hàm hai biến  $f(x,y)$  trên miền  $D$  được xác định thông qua giới hạn của tổng Riemann [6] được chỉ ra trong slide ở Hình 1a. Đi kèm theo slide này là một số hình ảnh được vẽ trong Maple để minh họa cho các khái niệm. Hình 1b minh họa cho tổng Riemann của hàm  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$  trên miền  $D = [0; 2] \times [0; 2]$ .

### 1. Định nghĩa

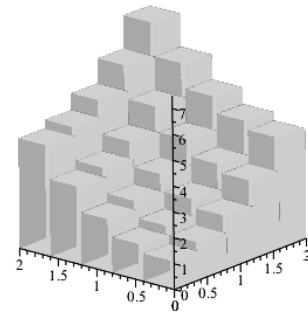
Tích  $f(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta A$  chính là thể tích của hình trụ có đáy là  $\Delta A$  và chiều cao là  $f(x_{ij}, y_{ij})$ . Lập tổng:

$$I_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}, y_{ij}) \cdot \Delta A$$

Tổng  $I_{mn}$  được gọi là tổng Riemann và được sử dụng để xấp xỉ thể tích hình trụ giới hạn bởi mặt  $f(x, y)$  như đã nêu ở bài toán ban đầu.



Hình 1a. Định nghĩa tích phân hai lớp qua tổng Riemann



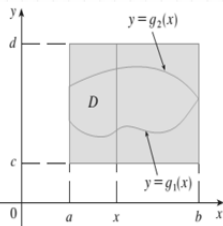
Using a midpoint Riemann sum, an approximation of  $\int_0^2 \int_0^2 f(x, y) \, dy \, dx$  where  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ . Actual value: 14.667. Approximate value: 14.560. Grid:  $5 \times 5$

Hình 1b. Minh họa tổng Riemann

Tích phân hai lớp được tính trên hai hệ tọa độ là tọa độ Descartes và tọa độ cực. Cách tính trong hệ tọa độ Descartes được trình bày trong slide ở Hình 2a. Đồng thời, hình ảnh Maple minh họa cho ví dụ tính tích phân hai lớp trong tọa độ Descartes của hàm  $f(x, y) = x + 2y + 1$  trên miền D giới hạn bởi 2 đồ thị:  $y = 2x^2$  và  $y = x^2 + 1$  được thể hiện ở Hình 2b. Qua các hình ảnh này, sinh viên có thể thấy rõ hơn các ứng dụng của tích phân hai lớp.

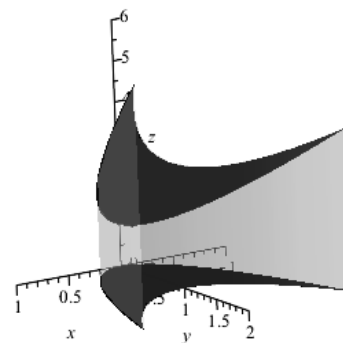
### Tích tích phân 2 lớp trong tọa độ Descartes

- Nếu  $f(x, y)$  liên tục trong miền D được xác định:  $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  trong đó các hàm  $g_1(x), g_2(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  thì ta có:



$$\iint_D f(x, y) \, dA = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

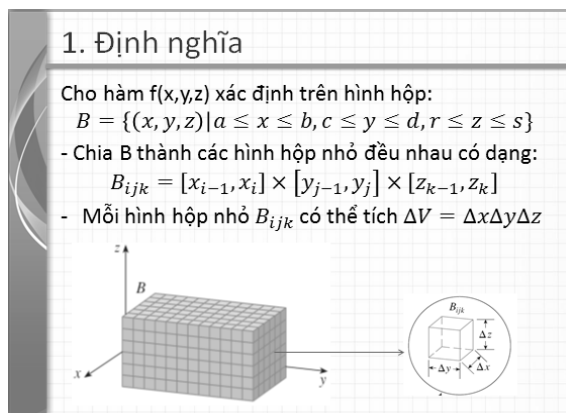
Hình 2a. Cách tính tích phân hai lớp trong tọa độ Descartes



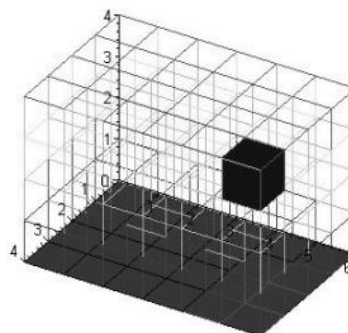
Hình 2b. Minh họa tích phân 2 lớp của hàm  $f(x, y) = x + 2y + 1$

Với bài giảng tích phân ba lớp, các slide cũng thiết kế tương tự như bài giảng tích phân hai lớp, mỗi slide trình bày ngắn gọn các lý thuyết và kèm theo đó là hình ảnh trong Maple minh họa rõ hơn cho lý thuyết đã trình bày. Các hình ảnh trong phần này đều là hình ảnh trên không gian 3 chiều nên sẽ rất khó cho giảng viên nếu chỉ vẽ bằng tay. Với Maple, ta có thể vẽ những hình ảnh này một cách dễ dàng và xem hình ảnh ở mọi góc độ. Đặc biệt, trên Maple ta có thể tạo ra các hình ảnh động. Những hình ảnh động này rất hữu ích khi ta trình bày khái niệm về tổng Riemann của tích phân hai, ba lớp. Hình 3a là một slide trình bày cách phân hoạch miền

tính tích phân ba lớp, còn Hình 3b là một hình ảnh động của Maple minh họa việc phân hoạch trên.

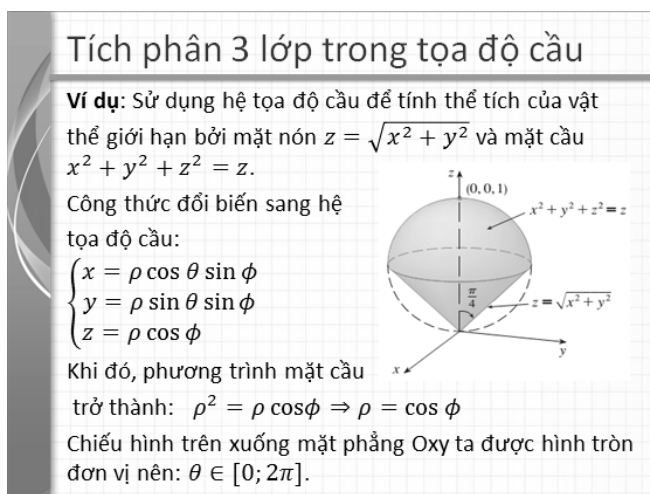


Hình 3a. Phân hoạch miền tính tích phân ba lớp

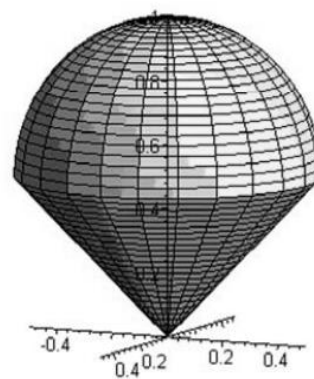


Hình 3b. Ảnh động minh họa cách phân hoạch miền lấy tích phân

Tích phân ba lớp được tính trên 3 hệ tọa độ: tọa độ Descartes, tọa độ trụ và tọa độ cầu. Ở mỗi hệ tọa độ, ngoài công thức tính toán, tác giả đã đưa thêm nhiều ví dụ và cách giải cụ thể để sinh viên tính toán ngay trên lớp qua đó nắm được các bước giải để có thể sử dụng Maplet tính tích phân. Hình 4a dưới đây là slide trình bày một ví dụ minh họa cho cách tính tích phân trong hệ tọa độ cầu và Hình 4b ảnh minh họa vật thể cần xác định thể tích trong ví dụ.



Hình 4a. Ví dụ tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu



Hình 4b. Minh họa vật thể cần tìm thể tích bằng Maple

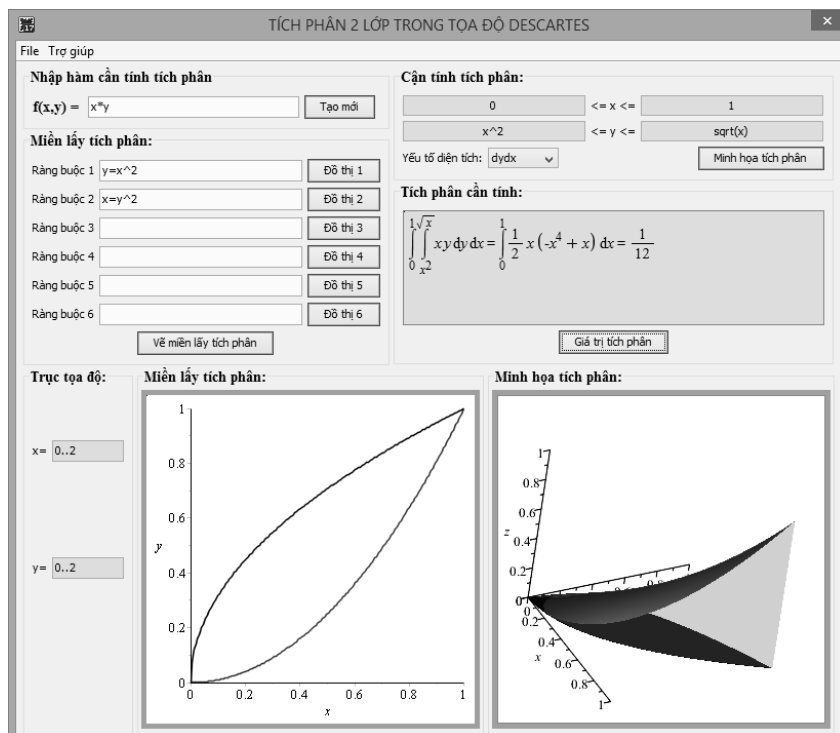
### 3.2. Ứng dụng Maplet tính tích phân hai lớp, ba lớp

Qua thời gian dạy phép tính tích phân hàm nhiều biến, tác giả nhận thấy rằng hầu hết các sinh viên đều gặp khó khăn khi giải các bài tập tích phân. Khó khăn này xuất phát từ việc muốn tính được tích phân thì phải vẽ được miền lấy tích phân để từ đó xác định được các cận tính tích phân. Để giúp sinh viên thực hành tính toán dễ dàng hơn, tác giả đã lập trình ra một

ứng dụng tính tích phân bằng ngôn ngữ lập trình Maple. Các ứng dụng với giao diện đồ họa như thế được gọi là Maplet. Maplet tính tích phân này giúp sinh viên giải các bài tập tích phân theo từng bước như trong lý thuyết đã học. Ứng dụng này bao gồm 5 giao diện nhỏ trong đó có 2 giao diện tính tích phân hai lớp và 3 giao diện tính tích phân ba lớp. Về cơ bản, mỗi giao diện có ba chức năng chính: minh họa được hình ảnh tích phân và miền lấy tích phân, xác định công thức tích phân cần tính và tính giá trị tích phân. Để sử dụng được ứng dụng thì máy tính cá nhân phải được cài đặt phần mềm Maple từ phiên bản 17 trở lên. Sau đây, tác giả sẽ trình bày các ví dụ sử dụng ứng dụng Maplet để giải bài tập tích phân hàm nhiều biến.

**Ví dụ 1.** Tính tích phân hai lớp của hàm  $z = xy$  trên miền D là miền giới hạn bởi hai đồ thị  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .

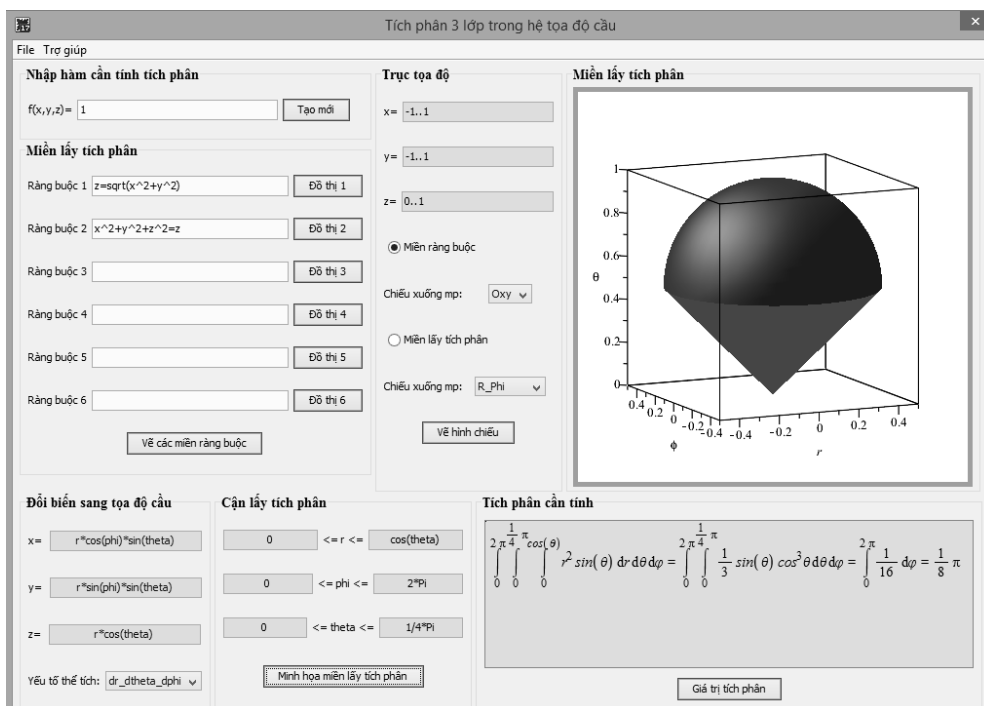
Để giải ví dụ này ta mở ứng dụng Maplet và chọn phần tính tích phân hai lớp trong hệ tọa độ Descartes. Ở cửa sổ tính tích phân trong tọa độ Descartes, ta nhập hàm cần tính tích phân  $f(x, y) = xy$ , nhập hai đường  $y = x^2, x = y^2$  lần lượt vào các “Ràng buộc 1” và “Ràng buộc 2”. Sau đó, nhấn nút “Vẽ miền lấy tích phân” để xem hình ảnh của miền cần tính tích phân, có thể điều chỉnh trục tọa độ để xem hình ảnh rõ hơn. Dựa trên hình ảnh miền D, ta xác định được các cận tính tích phân và thứ tự tính tích phân. Muốn biết hình ảnh của tích phân cần tính ta nhấn nút “Minh họa tích phân”. Bước cuối cùng là nhấn nút “Giá trị tích phân” để chương trình tính và đưa ra kết quả.



Hình 5. Cửa sổ ứng dụng tính tích phân hai lớp trong tọa độ Descartes

**Ví dụ 2.** Sử dụng hệ tọa độ cầu tính thể tích vật thể giới hạn bởi mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  và mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

Mở ứng dụng Maplet và chọn tính tích phân ba lớp trong hệ tọa độ cầu. Vì tính thể tích vật thể nên theo lý thuyết hàm  $f(x, y, z) = 1$ . Nhập các công thức  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  vào “Ràng buộc 1”,  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  vào “Ràng buộc 2” và nhấn nút “Vẽ các miền ràng buộc” để thấy được vật thể cần tính thể tích. Thay đổi hệ trục tọa độ hợp lý để xem hình ảnh rõ hơn hoặc có thể chiếu vật thể vừa vẽ xuống các mặt phẳng tọa độ để có thể xác định được cận tính tích phân. Trong trường hợp này, người sử dụng phải tính toán các cận bằng tay như trong Hình 4a và nhập kết quả vào các ô tương ứng. Sau khi có các cận tính tích phân, người dùng có thể kiểm tra miền tính tích phân với các cận đó có phù hợp với hình ảnh miền ràng buộc ban đầu không bằng cách nhấn nút “Minh họa miền lấy tích phân”. Ở bước này, tùy vào các cận mà ta chọn một thứ tự tính tích phân tương ứng trong danh sách “Yếu tố thể tích”. Cuối cùng, nhấn nút “Giá trị tích phân” để nhận được kết quả.



Hình 6. Cửa sổ ứng dụng tính tích phân ba lớp trong tọa độ cầu

#### 4. KẾT LUẬN

Với bộ công cụ này, tác giả hi vọng sẽ giúp cho sinh viên thấy thích thú hơn khi học toán. Khi sử dụng bộ công cụ, giảng viên sẽ tiết kiệm được thời gian dạy lý thuyết trên lớp qua đó có thể cùng sinh viên giải các bài tập hoặc có thể gợi mở các vấn đề mở rộng để sinh viên tự nghiên cứu. Sinh viên nên tự giải một số bài tập sau đó sử dụng ứng dụng để kiểm tra kết quả. Ứng dụng Maplet cho kết quả tính toán nhanh và minh họa rõ ràng tích phân cần tính. Tuy nhiên, ứng dụng cũng có một số hạn chế như chưa đưa ra được cận tính tích phân, miền tính tích phân cần đưa thêm một số hình thường gặp như tam giác, tứ diện, hình cầu... để việc xác định nhanh chóng hơn.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] B. Kramarski, C. Hirsch (2003). Using computer algebra systems in mathematical classrooms, *Journal of Computer Assisted Learning*, Vol. 19, pp. 35–45.
- [2] M. Kendal, K. Stacey (2002). Teacher in transition: Moving towards CAS-supported classroom, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, Vol 34(5), pp. 196–201.
- [3] P. Drijvers (2000). Students encountering obstacles using CAS, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Vol. 5, pp. 189-209.
- [4] S. Noinang, B Wiwatanapataphee, & Y. H. Wu (2008). An Integrated Powerpoint-Maple based Teaching-Learning Model for Multivariate Integral Calculus, *International Electronic Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, No. 1.
- [5] I. H. Perjési (2003). Application of CAS for teaching of integral-transforming theorems, *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, Vol 35(2), pp. 43–47.
- [6] Stewart J. (2008). “Multiple Integrals”, *Calculus*, 6th ed., California: Thomson/ Brooks/ Cole, pp. 986-1061.

### MAPLE – POWERPOINT – A TEACHING AND LEARNING TOOL FOR INTEGRAL CALCULUS

**Tran Cong Man**

*Department of Mathematics, Hue University College of Sciences*

*Email: mantran.math@gmail.com*

#### ABSTRACT

*This paper presents a teaching and learning tool for the integral calculus course. This tool consisting of a set of PowerPoint slides with Maple animations and interactive Maplets, which is developed to help instructors teach in class and to provide students with best opportunities for self-planned learning and self-assessment. More specifically, the PowerPoint slides with Maple animations help instructors to explain the certain concepts and methods more effectively and clearly while the interactive Maplets help students review the theory and self-exercises.*

**Keywords:** *Maple, Maplet, slide.*

